## 磨尖课02 嵌套函数的零点问题

嵌套函数的零点问题是很多学生难以跨越的一道“鸿沟”.求解时通常先“换元解套”,将复合函数拆解为两个相对简单的函数,再借助函数的图象、性质求解,下面我们一起探讨如何跨越这道“鸿沟”.

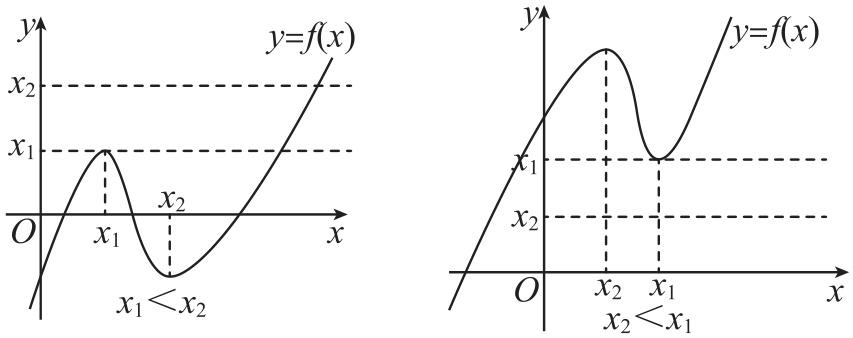
### 磨尖点一 求嵌套函数的零点个数

典例1（1） 若函数有极值点，，且，则关于的方程的不同实根的个数是( A ).

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

[解析]令，则.又由题意知，两根分别为，，即方程的根分别为，，所以或.

如图所示.



由图象可知有2个解，有1个解，因此方程的不同实根个数为3,故选.

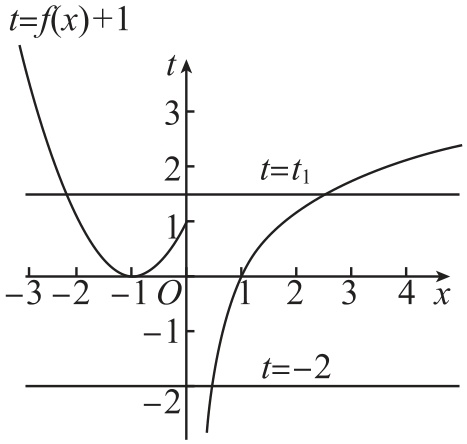
（2） [2024·长沙模拟]已知函数则函数的零点个数是( D ).

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

[解析]令

①当时，，则函数在上单调递增，

因为,，所以由零点存在定理可知，存在，使得.



②当时，，令，解得，，

作出函数的图象，直线，，，如图所示，

由图象可知，直线与函数的图象有两个交点,

直线与函数的图象有两个交点,直线与函数的图象有且只有一个交点.综上所述，函数的零点个数为5.故选.



求嵌套函数零点个数的关键是“换元解套”.其易错点如下：①不理解函数与是同一个函数；②画错了的图象；③误将的个数看作或的零点个数.

#### 磨尖训练

1. [2024·保定模拟]（多选题）已知函数若，则下列说法正确的是( AC ).

A. 当时，有4个零点 B. 当时，有5个零点

C. 当时，有1个零点 D. 当时，有2个零点

[解析]令，则.

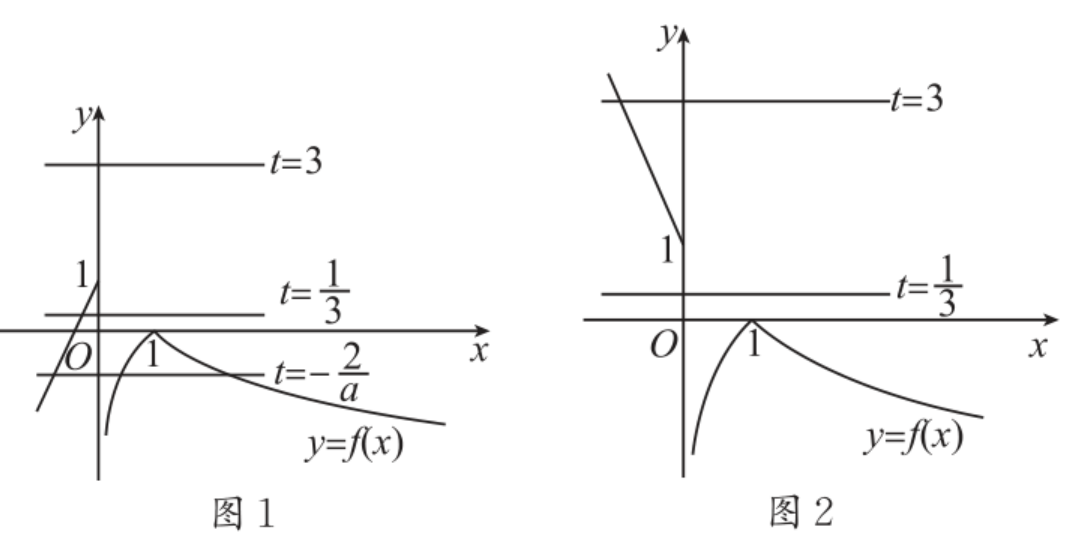
当时，由得,；由得,或.

当时，，符合题意.

的零点个数等价于的图象与曲线、直线和直线的交点个数，作出的图象，如图1所示，

由图象可知,的图象与曲线、直线和直线共有4个交点，即有4个零点，正确，错误.

当时，，不符合题意，舍去，则的零点个数等价于的图象与直线和直线的交点个数，作出的图象，如图2所示，



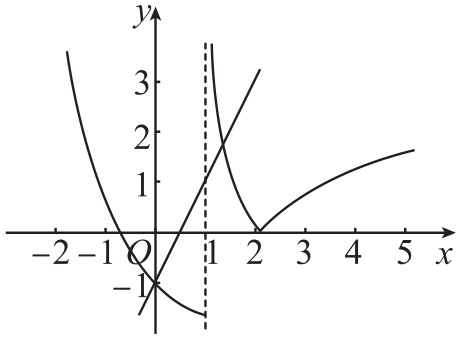
由图象可知,图象与直线和直线有且仅有1个交点，即有且仅有1个零点，正确，错误.

故选.

2. [2024·郑州模拟]已知函数则函数的零点个数是( B ).

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

[解析]令，由，则，分别作出的图象和直线，如图所示，



由图象可得的图象与直线有两个交点，横坐标设为，，则，，

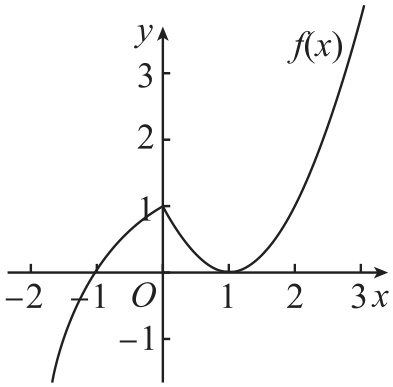
所以有2个不等实根；当时，有3个不等实根.

综上，的实根个数为5，即函数的零点个数是5.故选.

### 磨尖点二 由嵌套函数的零点个数情况求参数范围

典例2 [2024·云南模拟]已知函数若函数恰有8个不同零点，则实数的取值范围是.

[解析]由已知得,



则或，作出的图象，如图，

则若，解得或.

设，由得，

此时或，

当时，，有2个根，当时，，有1个根，

则必须有有5个根.

设，由得，

若，则由得或，有1个根，

有2个根，此时有3个根，不满足条件.

若，则由得，有1个根，不满足条件.

若，则由得，有1个根，不满足条件.

若，则由得或或，

当时，有1个根，当时，有3个根，

当时，有1个根，此时有个根，满足条件.

故，即实数的取值范围是.



解决形如或的函数零点问题，其解题原理基本一致，都是通过换元思想和整体代换思想进行求解，具体步骤：

1.换元，令；

2.求解函数的零点或零点个数；

3.求解方程的实根或实根个数或通过已知零点个数判断参数的取值范围.

这种方法的实质是将或的零点分拆成上述步骤1,2进行求解.

#### 磨尖训练

[2024·江苏模拟]已知函数，若函数有零点，且与函数的零点完全相同，则实数的取值范围是.

[解析]设为函数的一个零点.

因为函数与有相同的零点，所以，即，所以.

若，则与有相同的零点0.满足题意.

若，则有2个零点,分别为0和，所以也有2个零点0和.

又因为有2个零点，所以无实数解，即无实数解，所以，解得.

综上，实数的取值范围为.